

HET RAADSEL VAN HET VERDWENEN VIERKANTE CENTIMETERTJE

Inleiding

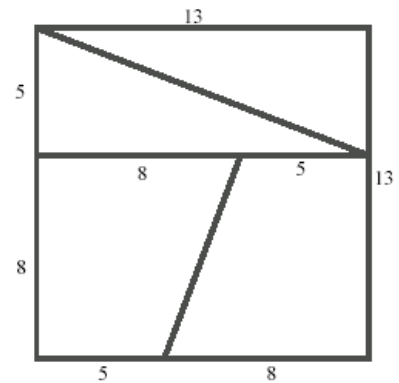
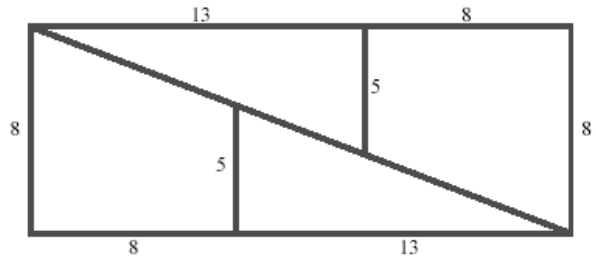
Hiernaast is een rechthoek getekend met zijden 21 cm en 8 cm. De rechthoek is verdeeld in vier stukken:

- twee rechthoekige driehoeken met zijden 13 cm en 5 cm.
- twee rechthoekige trapezia met o.a. zijden van 8 cm en 5 cm.

De totale oppervlakte van de rechthoek is: $21 \times 8 = 168 \text{ cm}^2$.

Vervolgens leggen we de stukjes puzzel anders bij elkaar. Nu ontstaat een vierkant van 13 cm bij 13 cm met een oppervlakte $13 \times 13 = 169 \text{ cm}^2$.

Het lijkt er op dat er 1 cm^2 ontstaan is of verdwenen is als je het andersom doet. Gek hè?



Opdracht

In deze opdracht bekijken we dit raadsel wat preciezer. Je maakt zelf een puzzel en bekijkt enige wiskunde die hiermee verband houdt.

Bovendien maak je aan het einde een mooie poster, waarop jullie de opgave, opdrachten, antwoorden e.d. presenteren.

Soms volstaat een kort antwoord, soms is een uitgebreid antwoord nodig. Alle antwoorden, redeneringen e.d. schrijf je op papier. Aan het einde van de lessen laat je steeds aan je wiskundeleraar zien wat je opgeschreven hebt en ook bij problemen, of erger, als je vastloopt, raadpleeg je de wiskundeleraar. Hij/zij helpt je graag verder.

- Onderzoek welke fout er gemaakt is. Is één van de plaatjes goed? Zo ja, welk plaatje is goed, welk plaatje is fout? Zo nee, welke fout zit er dan in beide plaatjes? Leg je antwoord (eventueel met tekeningen) duidelijk uit.

Het onderste plaatje is een vierkant. Dat komt omdat de zijde van het vierkant gelijk is aan som van de twee kleinere getallen die genoemd zijn. Je kunt gemakkelijk inzien dat je ook zo'n puzzel kunt maken zodat een vierkant van 21 cm bij 21 cm ontstaat.

- Maak zelf nu zo'n puzzel zodat er een vierkant van 21 cm bij 21 cm kan ontstaan.

Laten we de oorspronkelijke puzzel een "puzzel-5" noemen. De puzzel van opgave b noemen we dan de "puzzel-6".

- In de puzzel-5 is de oppervlakte van de rechthoek 1 cm^2 kleiner dan het vierkant. Hoe is dat bij de puzzel-6?

Na puzzel-6 kun je natuurlijk een puzzel-7, puzzel-8, enz, maken

- d. Maak een lijst met de afmetingen van de stukjes in een puzzel-5 t/m puzzel-10. Zet in die lijst ook de oppervlakten van de rechthoek en het vierkant.
- e. Bestaat er ook een puzzel-4, puzzel-3, puzzel-2 en puzzel-1? Wat zijn de afmetingen van de bijbehorende stukjes?
Vul de lijst van opgave d aan met de gegevens van de puzzel-4, puzzel-3, puzzel-2 en puzzel-1.

Als je nog wat meer tijd hebt om je in dit raadsel te verdiepen, kun je nog aan de onderstaande opdrachten werken.

Als je naar de verhouding breedte : lengte (bedoeld wordt: "breedte staat tot lengte") van de rechthoeken kijkt en vereenvoudigt naar $1 : \dots$, dan lijkt die verhouding op de duur niet meer veranderen.

- f. Hoe groot wordt die verhouding?
- g. Gebeurt er ook zo iets met de verhouding tussen de rechthoekzijden van de driehoeken?

De getallen die tot nu toe gebruikt zijn, komen ook voor in de rij van Fibonacci.

- h. Zoek op wat de rij van Fibonacci is en wat je daar allemaal over te weten kunt komen.

De verhouding tussen de opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci wordt op de lange duur $1 : \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1 : 1,618$ (in de wiskunde noemen die getallen "de termen van de rij")

- i. Kijk eens of je dat kan bewijzen of zoek een bewijs op.
Schrijf het bewijs op zodanig dat je het "iedereen" uit kan leggen.

De rij van Fibonacci is een speciaal voorbeeld van een "Lucas-rij".

- j. Zoek op wat Lucas-rijen zijn.
- k. Kun je met drie opeenvolgende termen uit een Lucas-rij ook zo'n puzzel maken?
- l. Probeer eens te bewijzen dat de verhouding breedte : lengte van de rechthoeken nadert tot $1 : \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1 : 2,618$

Afronding

Maak een fraaie poster waarop je laat zien wat je allemaal ontdekt en geleerd hebt bij het oplossen van dit raadsel. Bedenk wat je publiek volgens jullie (ten minste) geleerd moet hebben als ze kennis hebben genomen van jullie poster. Bedenk bijvoorbeeld een vraag die een medeleerling moet kunnen beantwoorden als hij/zij jullie poster heeft bestudeerd.

---einde---